Kutatási téma és eredmények ismertetése - Tóth Ágnes

Gráfszorzásokkal és fedésekkel kapcsolatos színezési problémák

Kutatási jelentés a Pro Progressio Alapítvány számára, 2012. szeptember 20.

A következőkben egy részletes ismertető olvasható az eddigi kutatási eredményeimről, melyben dőlt betűvel szedtem az előző év munkáját.

A gráfelmélet a matematika, ezen belül a kombinatorika egyik fontos ága. Központi fogalma a gráf, mely olyan struktúra, ami csúcsokból és az őket összekötő élekből áll. Ilyen struktúrák az élet számos területén előfordulnak, gráfokkal modellezhetők pédául szociális vagy kommunikációs hálózatok, számítási folyamatok vagy akár a molekulák szerkezete. A szemléltetés mellett sokszor a felmerülő problémák megoldásában is nélkülözhetetlen eszközként szolgálnak.

Egy gráf kromatikus száma a szükséges színek minimális száma, mellyel a gráf csúcsai kiszínezhetők úgy, hogy összekötött csúcsok különböző színt kapjanak. Ez az egyik legtöbbet vizsgált gráfparaméter. Viselkedése egyes helyzetekben ismert, másokban teljesen megértetlen. A rokon paraméterek száma is igen nagy. Fontos alkalmazási területe az ütemezéselmélet. A doktori munkám során gráfszínezésekkel kapcsolatos problémákon belül lényegében két nagyobb, elsősorban elméleti szempontból érdekes, sokat vizsgált témával foglalkozom: színezésekkel rokon gráfparaméterek különböző gráfhatványokra tekintett aszimptotikus vizsgálatával, valamint élszínezéssel kapcsolatos fedési problémákkal.

Számos gráfparaméter esetén igaz, hogy a gráf valamilyen szorzás szerinti hatványaiban vizsgálva a paramétert, a kapott értékek megfelelő normálásával kapott sorozat konvergens, a határérték érdekes, új gráfparamétert ad. Egy gráf Shannon-kapacitása [Shannon], melynek információelméleti jelentése a csatornakapacitás elméleti felső határa hiba nélküli kódolás esetén, is ilyen módon származtatható. (A Shannon-kapacitás ún. normális hatványozás esetén a függetlenségi szám aszimptotikus növekedésével definiálható. A függetlenségi szám a gráfban található legnagyobb olyan ponthalmaz mérete, mely nem tartalmaz élet.) Ilyen kérdésekkel foglalkoznak az [1], [2], [5] cikkek.

Egy gráf Hall-hányadosa a csúcsszáma és a függetlenségi száma hányadosának maximuma a gráf összes részgráfjára nézve. A fogalom bevezetését színezési problémák motiválták [Cropper et al]. Simonyi különböző gráfszorzásokra vizsgálta a paraméter aszimptotikus értékét, és megmutatta, hogy normális szorzásra a megfelelően normált aszimptotikus érték a gráf Witsenhausen hányadosa, konormális szorzásra pedig a gráf frakcionális kromatikus száma [Simonyi]. Az utóbbi gráfparaméter a kromatikus szám frakcionális relaxációjaként definiálható. Míg a Witsenhausen hányados a kromatikus szám aszimptotikus értéke normális szorzás esetén. (A paraméternek információelméleti jelentése is van.)

Beláttam, hogy lexikografikus szorzás esetén is a frakcionális kromatikus szám adódik a megfelelő sorozat határértékeként [1], ezzel igazolva Simonyi sejtését. A direkt szorzás esetén megfogalmazott analóg probléma több szempontból eltér az előzőektől, az ezen szorzásra megfogalmazott sejtést is sikerült igazolni [5].

Vizsgáltam a gráf egy hasonló paraméterét, a gráf függetlenségi hányadosát is, mely a függetlenségi szám és a csúcsszám hányadosaként definiálható. Egy korábbi munkámban meghatároztam ezen paraméter direkt szorzásra vett aszimptotikus értékét teljes többrészes gráfokra [2], ezzel megválaszolva Brown, Nowakowski és Rall kérdését [Brown et al]. *Nem rég pedig Alon és Lubetzky [Alon et al] kérdésére válaszolva, tetszőleges gráf esetén is egyszerű formulát adtam a függetlenségi hányados direkt szorzásra vett aszimptotikus értékére. Az eredményből rögtön adódik többek között Brown és szerzőtársainak azon sejtése is mely szerint ez a gráfparaméter két gráf diszjunkt uniója esetén megegyezik a két gráfra külön-külön vett értékek maximumával. Az eredményekből készült publikációt közlésre nyújtottam be [9].*

Szintén gráfszorzásokkal kapcsolatos kérdéseket tárgyal a [3] dolgozat, melynek témája egy Körner és Malvenuto által felvetett kombinatorikai kérdés [Körner et al], továbbá érdekessége, hogy egy már a 19. században is vizsgált sorozatottal [André] kapcsolatos eredményeket is használ.

Az [4], [8], [6] cikkek élszínezett gráfok egyszínű komponensekkel való fedesével foglalkoznak. A terület talán legismertebb megoldatlan sejtése a Ryser-sejtés (mely először Ryser diákja, Henderson doktori dolgozatában szerepelt [Henderson]). A sejtés önmagában is vizsgált speciális esete szerint a teljes gráf éleit r színnel színezve, a gráf csúcshalmaza mindig lefedhető legfeljebb $r-1$ egyszínű összefüggő komponenssel [Gyárfás].

Egy gráf Gallai-színezésén élek olyan színezését értjük, melyben nincs teljesen tarka háromszög. (A felhasználható színek száma tetszőleges.) Összehasonlítási gráfokat vizsgálva Gallai Tibor érdekes tételeket bizonyított ezen feltételt kielégítő élszínezett gráfokkal kapcsolatban [Gallai], és ez a fogalom később a gráfelmélet számos más területével kapcsolatban is fontosnak bizonyult. Könnyű látni, hogy teljes gráf Gallai-színezése esetén mindig van a gráfnak egyszínű feszítő részgráfja. Gyárfás és Sárközy megmutatta, hogy tetszőleges gráf Gallai színezése esetén található olyan nagy egyszínű összefüggő komponens, melynek mérete arányos a gráf csúcsszámával, és ez az arány csak a gráf függetlenségi számától függ [Gyárfás et al]. Gyárfással és Simonyival ezen eredmény általánosításával foglalkoztunk [4]. Igazoltuk, hogy tetszőleges gráf Gallai-színezése esetén ha a gráf függetlenségi száma rögzített, akkor a ponthalmaz lefedhető véges sok egyszínű komponenssel. A kérdés vizsgálata során egy másik, önmagában is érdekes probléma is felmerült, mely irányított többrészes gráfok dominálási kérdésével kapcsolatos, és aminek megoldása kulcsszerepet játszott az előbbi állítás bizonyításában.

A kutatás folytatásaként Gyárfással, Fujitaval és Furuyaval bebizonyítottuk a fenti kérdés partícionálási megfelelőjét [8]. *Valamint vizsgáltuk élszínezett hipergráfok egyszínű komponensekre való partícionálási problémáját is. Éles becslést adtunk a szükséges részek számára a hipergráf függetlenségi számának függvényében. Az eredményekből készült dolgozat megjelent [8].*

Továbbá vizsgáltuk Király azon friss eredményének kiterjesztéseit is, mely a Ryser-sejtés fenti speciális esetének egy hipergráfokra történő általánosítása [Király]. *Megmutattuk, hogy egy r-uniform, r függetlenségi számú hipergráf éleit tetszőlegesen r színnel színezve mindig található két egyszínű összefüggő komponens, melyekkel a hipergráf teljes csúcshalmaza lefedhető [10].*

Gyárfás és Lehel fogalmazta meg a következő sejtést, mely a Ryser-sejtés páros gráfokra vonatkozó analóg verziójának tekinthető [Gyárfás, Lehel]. Tetszőleges teljes páros gráf éleit r színnel színezve, a sejtés szerint mindig található $2r-2$ egyszínű összefüggő komponens, melyek együttesen lefedik a gráf ponthalmazát. Könnyen igazolható, hogy $2r-1$ egyszínű komponens mindig elég, és adható olyan példa, amikor $2r-2$ komponensre szükség van. A sejtés állítása $r \leq 3$-ra egyszerűen adódik, Chen-nel, Fujita-val, Gyárfással és Lehellel közös eredmény, hogy az állítás igaz $r = 4$-re és $r = 5$-re is [6]. *Az eredményekből készült dolgozatot közlésre nyújtottuk be.*

További élszínezésekkel kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk a [7] dolgozatban. *A cikk beküldésre került.*

Kapcsolódó saját publikációk

[1] Á. Tóth, *On the ultimate lexicographic Hall-ratio*, Discrete Mathematics, 309 12 (2009), 3992–3997.

[2] Á. Tóth, *The ultimate categorical independence ratio of complete multipartite graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 23 4 (2009), 1900–1904.

[3] G. Brightwell, G. Cohen, E. Fachini, M. Fairthorne, J. Körner, G. Simonyi, Á. Tóth, *Permutation capacities of families of oriented infinite paths*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 24 2 (2010), 441–456.

[4] A. Gyárfás, G. Simonyi, Á. Tóth, *Gallai colorings and domination in multipartite digraphs*, Journal of Graph Theory, 71 3 (2012), 278–292.

[5] Á. Tóth, *On the ultimate direct Hall-ratio*, submitted to Graphs and Combinatorics

[6] G. Chen, S. Fujita, A. Gyárfás, J. Lehel, Á. Tóth, *Around a biclique cover conjecture*, submitted to Discrete Mathematics

[7] L. Lesniak, S. Fujita, Á. Tóth, New results on long monochromatic cycles in edge-colored complete graphs, submitted to Discrete Mathematics

[8] S. Fujita, M. Furuya, A. Gyárfás, Á. Tóth, *Partition of graphs and hypergraphs into monochromatic connected parts*, The Electronic Journal of Combinatorics, 19 3 (2012), P27.

[9] Á. Tóth, *Answer to a question of Alon and Lubetzky about the ultimate categorical independence ratio*, submitted to Journal of Combinatorial Theory Series B

[10] S. Fujita, M. Furuya, A. Gyárfás, Á. Tóth, *Vertex covers of edge-colored hypergraphs by monochromatic connected parts*, in preparation

További, külső hivatkozások

[Alon et al] N. Alon, E. Lubetzky, *Independent sets in tensor graph powers*, J. Graph Theory, 54 (2007), 73–87.

[André] D. André, *Développement de sec x and tg x*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 88 (1879), 965–979.

[Brown et al] J. I. Brown, R. J. Nowakowski, D. Rall, *The ultimate categorical independence ratio of a graph*, SIAM J. Discrete Math., 9 (1996), 290–300.

[Cropper et al] M. Cropper, M. S. Jacobson, A. Gyárfás, L. Jenő, *The Hall ratio of graphs and hypergraphs*, Les cahiers du Laboratoire Leibniz., No. 17., 2000.

[Gallai] T. Gallai, *Transitiv orientierbare Graphen*, Acta Math. Sci. Hungar., 18 (1967) 25–66.

[Gyárfás] A. Gyárfás, *Parition coverings and blocking sets in hypergraphs*, Commun. Comput. Autom. Inst. Hungar. Acad. Sci. 71 (1977)

[Gyárfás et al] A. Gyárfás, G. N. Sárközy, *Gallai colorings of non-complete graphs*, Discrete Math., 310 (2010), 977–980.

[Henderson] J. R. Henderson, *Permutation decomposition of (0,1)-matrices and decomposition transversals*, Ph.D. Thesis, Caltech (1971)

[Király] Z. Király, *Monochromatic components in edge-colored complete uniform hypergraphs*, Electron. Notes Discrete Math., 38C (2011), 517–521.

[Körner et al] J. Körner and C. Malvenuto, *Pairwise colliding permutations and the capacity of infinite graphs*, SIAM J. Discrete Math., 20 (2006), 203–212.

[Lehel] J. Lehel, *Ryser's conjecture for linear hypergraphs*, manuscript, 1998.

[Shannon] C. E. Shannon, *The zero-capacity of a noisy channel*, IRE Trans. Inform. Theory 2 (1956), 8–19.

[Simonyi] G. Simonyi, *Asymptotic values of the Hall-ratio for graph powers*, Discrete Math. 306 (2006), 2593–2601.